

## Les modèles HJM et LMM revisités

François-Éric Racicot<sup>\*</sup>

Département des sciences administratives  
Université du Québec, Outaouais

Raymond Théoret

Département Stratégie des Affaires  
Université du Québec, Montréal

**RePad Working Paper No. 042006**

---

<sup>\*</sup> Adresse postale : François-Éric Racicot, Département des sciences administratives, Université du Québec en Outaouais, Pavillon Lucien Brault, 101 rue Saint Jean Bosco, Gatineau, Québec, Canada, J8Y 3J5.

Correspondance : [francoiseric.racicot@uqo.ca](mailto:francoiseric.racicot@uqo.ca).

Raymond Théoret, Département stratégie des affaires, Université du Québec à Montréal, 315 est, Ste-Catherine, Montréal, H2X-3X2.

Correspondance : [theoret.raymond@uqam.ca](mailto:theoret.raymond@uqam.ca).

Ce papier est l'un des chapitres de notre prochain ouvrage intitulé : *Finance computationnelle et gestion des risques*.

## Les modèles HJM et LMM revisités

### Résumé

Dans ce papier, nous abordons les modèles de Heath-Jarrow-Morton (1992) et du Libor-Market-Model, aussi connu sous le nom de modèle de Brace-Gatarek-Musiela (1997). Nous traitons les extensions de ces modèles et leur représentation dans l'univers de Black et Scholes. Nous adoptons une approche pédagogique et élaborons de façon exhaustive les développements de ces modèles. Finalement, nous envisageons également l'évolution de ces modèles vers le *pricing* de produits dérivés toujours plus sophistiqués, tels les TARN et vers des versions plus complexes comme le modèle SV de Cheyette .

### Abstract

In this paper, we study the following models : Heath-Jarrow-Morton (1992) and Libor-Market- Model, also known as Brace-Gatarek-Musiela model (1997). We survey the extensions of these models and their representation in the Black and Scholes world. Our approach is pedagogical and is based on an exhaustive elaboration of the developments of these models. Finally, we discuss the evolution of these models towards the pricing of more complex structured derivatives, like TARN and we also briefly analyse more advanced versions like the SV Cheyette model.

Mots-clefs: produits dérivés; ingénierie financière; évaluation des actifs; finance computationnelle.

Keywords : derivatives; financial engineering; asset valuation; computational finance.

Le modèle de Heath, Jarrow et Morton (HJM) est l'un des modèles de la structure à terme des taux d'intérêt les plus étudiés. Ce modèle en est un d'arbitrage. En effet, par opposition aux modèles d'équilibre qui ne cherchent pas à s'ajuster automatiquement à la structure des taux d'intérêt, les modèles d'arbitrage ont l'avantage d'essayer de le faire. Les modèles d'équilibre requièrent de choisir judicieusement les paramètres; ils pourront alors s'ajuster à toutes sortes de structure à terme rencontrées dans la pratique. Mais l'ajustement n'est pas parfait et dans certains cas, des erreurs importantes en résultent. Avec raison, la plupart des praticiens trouvent cet état de choses insatisfaisant. Ils expliquent qu'ils ne peuvent se fier au prix d'une option sur obligation quand le modèle n'est pas en mesure de reproduire le pricing d'une obligation sous-jacente. Une erreur de 1% sur le prix de l'obligation peut engendrer une erreur de 25% au niveau du prix de l'option. Dans la première section, nous présentons des modèles classiques d'arbitrage qui s'ajustent exactement à la structure à terme observée. Dans une deuxième section, nous présentons des formes analytiques conformes au modèle de HJM.

## 1. Introduction à la modélisation des taux à terme<sup>1</sup>

Dans le cas où le taux d'intérêt est constant, nous noterons une obligation à zéro coupon (*discount bond*) comme suit :

$$P(t, T) = e^{-r(T-t)}$$

où  $t$  est la date d'achat et  $T$ , son échéance.  $P(T, T) = 1$ , c'est-à-dire que cette obligation donne 1 \$ à son échéance.  $P(0, T)$  est le prix au temps  $t = 0$  de ce titre qui vaut 1 \$ au  $T$ . Le taux implicite au prix d'obligation, en prenant le logarithme de chaque membre de l'équation, est donnée par:

$$r = -\frac{\ln P(t, T)}{(T - t)}$$

Comme nous le savons, les taux d'intérêt sont variables. La formule que nous retenons

---

<sup>1</sup> Pour rédiger cette section, nous nous sommes inspirés des documents suivants : Baxter, M. & Rennie (1996), *Financial Calculus : An introduction to derivatives pricing*, Cambridge University Press, Cambridge; de la Grandville, O. (2001), *Bond pricing and portfolio analysis : Protecting investors in the long run*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts; James, J. et Webber, N. (2000), *Interest rate modelling*, Wiley series in financial engineering, Chichester; Heath, D., Jarrow, R., et Morton, A. (1992) Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, 60, 77-105.

pour le taux d'intérêt est donc de:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{(T - t)}$$

Quelle que soit la courbe de prix pour l'obligation à zéro coupon, nous pouvons donc produire la courbe des rendements à l'échéance dite encore structure à terme des taux d'intérêt<sup>2</sup>. Plus précisément, il s'agit de la représentation graphique de  $R(t, T)$  en fonction de  $T$  pour un  $t$  donné.

## 1.1 Taux d'intérêt instantané

Quelle est la valeur d'une somme d'argent à l'instant présent, c'est-à-dire dans un intervalle de temps infinitésimal? Pour répondre à cette question, réécrivons l'équation précédente pour un intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{\ln P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}$$

Le taux d'intérêt instantané est obtenu en prenant la limite de cette dernière équation, c'est-à-dire :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = r_t = R(t, t)$$

Mais la limite de cette expression est en fait la définition de la dérivée de cette dernière en regard de  $T$ , où  $t + \Delta t = T$ , c'est-à-dire :

$$r_t = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T)$$

## 1.2 Taux forwards (ou taux à terme)

Le processus de taux à très court terme  $r_t$  n'est pas une relation biunivoque (*one-to-one mapping*) de  $P(t, T)$ . La translation entre ces deux quantités implique une perte d'information. Il nous faut donc une extension de  $r_t$  de manière à obtenir une relation biunivoque (*one-to-one mapping*) entre le prix d'une obligation à zéro coupon  $P(t, T)$  et le rendement  $R(t, T)$  qui préserve la notion d'instantanéité. Considérons un contrat à terme (contrat *forward*) qui promet au temps  $t$  de payer un montant dans le futur à l'instant  $T_1$  et de recevoir un paiement en retour à l'instant  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). En fait, ce contrat n'est qu'un contrat *forward* exercé sur une

---

<sup>2</sup> On parle de *yield curve* en anglais.

obligation à zéro coupon qui échoit en  $T_2$ . Mais quel est le prix du *forward*? Il existe une façon de dupliquer ce contrat au temps  $t$  en achetant une obligation à zéro coupon qui échoit en  $T_2$  et en vendant une quantité de  $x$  unités de l'obligation qui échoit en  $T_1$ . Cette procédure a comme coût initial de :

$$P(t, T_2) - xP(t, T_1)$$

au temps  $t$  et requiert un paiement  $y$  au temps  $T_1$  qui produira un montant d'un dollar au temps  $T_2$ . Le prix de ce contrat à terme doit par définition avoir une valeur nulle à l'instant  $T_1$ . Par conséquent,  $x$  prend la valeur suivante :

$$x = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

de sorte que  $P(t, T_2) - \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} P(t, T_1) = 0$ .  $x$  est donc le prix forward qui correspond à l'achat d'une obligation qui échoit en  $T_2$  au temps  $T_1$ . Le taux forward peut être obtenu de la manière suivante. Nous savons que le prix forward d'une obligation à zéro coupon qui échoit en  $T_2$  au temps  $T_1$  est donnée par :

$$\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} = e^{-f1(T_2 - T_1)}$$

En prenant le logarithme de chaque membre de cette expression et après quelques manipulations, on obtient l'expression du taux forward :

$$\ln \left[ \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \right] = -f1(T_2 - T_1) \Rightarrow f1 = \frac{-\ln \left[ \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \right]}{T_2 - T_1} = -\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

En supposant que  $T_1 = T$  et  $T_2 = T + \Delta t$ ,  $\Delta t$  étant un accroissement infinitésimal, on obtient l'expression du taux forward d'un emprunt instantané :

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$$

puisque l'expression  $-\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  est celle d'une dérivée.

Lorsque  $T = t$ , c'est-à-dire dans le cas d'un emprunt forward qui s'effectue instantanément, on obtient exactement le taux courant instantané, c'est-à-dire :

$$f(t, t) = r_t$$

Mais cette fois-ci, ce qui n'est pas le cas pour le  $r_t$  obtenu précédemment, étant donné un taux forward  $f(t, T)$ , on peut retrouver le prix  $P(t, T)$  et le rendement  $R(t, T)$ . On peut dégager le lien entre  $R(t, T)$  et  $f(t, T)$  en différentiant la formule de  $R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$  par rapport à  $T$  comme suit<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(t, T)}{\partial T} &= - \left( \frac{\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} (T - t) - \frac{\partial (T - t)}{\partial T} \ln P(t, T)}{(T - t)^2} \right) = \frac{\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}}{T - t} + \frac{\ln P(t, T)}{(T - t)^2} \\ &= \frac{f(t, T)}{T - t} - \frac{R(t, T)}{T - t} \\ \Rightarrow f(t, T) &= R(t, T) + (T - t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T} \quad \text{QED} \end{aligned}$$

En résumé, les taux forward  $f(t, T)$  et le rendement  $R(t, T)$ , qui sert à construire la courbe des rendements à l'échéance, peuvent être écrits en fonction de  $P(t, T)$ , le prix de l'obligation à zéro coupon. A l'inverse, le prix d'une telle obligation peut être écrit en fonction, soit du rendement à l'échéance ou du taux forward. Pour obtenir le prix de cette obligation en fonction du taux forward, on procède comme suit :

$$\begin{aligned} - \int_t^T f(t, u) du &= - \int_t^T - \frac{\partial \ln P(t, u)}{\partial T} du = -(T - t) \left( - \frac{\ln P(t, T)}{T - t} \right) \\ \Rightarrow P(t, T) &= e^{- \int_t^T f(t, u) du} \end{aligned}$$

Le prix de l'obligation à zéro coupon en fonction du rendement à l'échéance peut s'obtenir en prenant l'exponentiel de l'expression du rendement comme suit :

---

<sup>3</sup> On applique la règle de différentiation de la division de deux fonctions.

$$P(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T)}$$

Donc, en ce qui concerne la modélisation, on peut choisir de spécifier le comportement d'une seule de ces trois quantités et les autres suivront de facto.

Nous sommes maintenant en mesure de passer au modèle qui nous intéresse dans ce chapitre, c'est-à-dire celui de Heath, Jarrow et Morton (1992)<sup>4</sup> à un seul facteur. Nous savons maintenant que les trois descriptions de la courbe des rendements à l'échéance, c'est-à-dire celles correspondant au prix  $P(t, T)$ , aux rendements  $R(t, T)$  et aux taux forwards  $f(t, T)$ , sont équivalentes. On peut donc en choisir une et spécifier son comportement. Dans ce contexte, le modèle HJM est donc une procédure rigoureuse et puissante basée sur les taux forwards  $f(t, T)$ . Ce modèle se présente comme suit.

Étant donné une courbe initiale de taux forward  $f(0, T)$ , le taux forward, pour chaque échéance  $T$ , est donné par :

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW_s \quad 0 \leq t \leq T$$

Sous forme différentielle cette équation peut s'écrire

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t$$

$\alpha(t, T)$  et  $\sigma(t, T)$  représentent, respectivement, la dérive (*drift*) et la volatilité. Elles dépendent toutes deux du temps et peuvent dépendre également des taux d'intérêt et de l'histoire du mouvement brownien ( $dW_t$ ) jusqu'au temps  $t$ . Le modèle HJM général impose quelques conditions sur  $\alpha$  et  $\sigma$  qui sont aux nombres de quatre. On supposera que :

- i) pour chaque échéance  $T$ , les processus  $\alpha(t, T)$  et  $\sigma(t, T)$  sont prévisibles et dépendent seulement de l'histoire du mouvement brownien jusqu'au temps  $t$  et

peuvent s'intégrer en ce sens que  $\int_0^T |\alpha(t, T)| dt$  et  $\int_0^T \sigma^2(t, T) dt$  sont finies;

- ii) la courbe initiale des taux forward,  $f(0, T)$ , est déterministe et satisfait à la

---

<sup>4</sup> Heath, D., Jarrow, R., et Morton, A. (1992), Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica* 60:77-105.

condition que  $\int_0^T |f(0, u)| du < \infty$  ;

iii) la dérive  $\alpha$  a une intégrale finie  $\int_0^T \int_0^u |\alpha(t, u)| dt du < \infty$  ;

iv) la volatilité  $\sigma$  a une espérance finie  $E \left( \int_0^T \int_0^u \sigma(t, u) dW_t \middle| du \right) < \infty$  .

Essentiellement, les deux premières conditions servent à s'assurer que les taux forwards sont biens définis par leurs équations différentielles stochastiques. En ce qui concerne les deux autres conditions, elles sont associées au résultat<sup>5</sup> qui stipule que la différentielle stochastique de l'intégrale de  $f(t, T)$  par rapport à  $T$  est l'intégrale de la différentielle stochastique de  $f$ .

## 2. Modèles classiques d'arbitrage<sup>6</sup>

Dans cette section, nous recourons à la notation suivante :

$P(t, T)$  : prix au temps  $t$  d'une obligation démunie versant 1\$ à son échéance  $T$ ;

$\Omega_t$  : l'ensemble d'information des valeurs passées et présentes des taux d'intérêt et des prix des obligations disponible au temps  $t$ ;

$v(t, T_1, T_2)$  : volatilité de  $P(t, T)$ ;

$f(t, T_1, T_2)$  : taux à terme (*taux forward*) au temps  $t$  pour la période s'échelonnant de  $T_1$  à  $T_2$ ;

$F(t, T)$  : taux à terme instantané au temps  $t$  pour un contrat ayant pour maturité  $T$ ;

$r(t)$  : taux d'intérêt sans risque à court terme au temps  $t$ ;

$dz(t)$  : processus de Wiener décrivant les mouvement de la structure à terme;

La variable  $F(t, T)$  est la limite de  $f(t, T, T + \Delta t)$ , c'est-à-dire :  $F(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta t)$ .

En supposant que le processus neutre au risque de  $P(t, T)$  est un modèle comportant

<sup>5</sup> Ce résultat est du même type que celui trouvé par Fubini.

<sup>6</sup> À ce sujet, on consultera : Hull, J.C. (2006), Options, futures, and other derivatives, 6<sup>e</sup> ed., Prentice Hall.



une seule source d'incertitude, c'est-à-dire un modèle à un seul facteur, le processus décrivant le prix de l'obligation est alors donné par :

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T, \Omega_t)P(t, T)dz(t) \quad (1)$$

$$v(t, T, \Omega_t) = 0$$

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln[P(t, T_1)] - \ln[P(t, T_2)]}{T_2 - T_1} \quad (2)$$

Apportons quelques explications à cette expression. Cette inversion s'explique par le fait que la définition de  $P(T_1, T_2)$ , le prix à terme d'une obligation démunie au temps  $t$  pour la période  $T_1$  à  $T_2$ , est donnée par :

$$P(T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \quad (3)$$

et que la valeur capitalisée de  $P(T_1, T_2)$  doit équivaloir à 1\$ dollar à son échéance, c'est-à-dire :

$$P(T_1, T_2)(1 + \Delta T \times R(t, T_1, T_2)) = 1\$ \quad (4)$$

où  $R(t, T_1, T_2)$  est le taux à terme correspondant à cette période et  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Il découle de (3) et (4) que

$$R(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left( \frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{P(t, T_2)} \right)$$

Par conséquent,  $R(t, T_1, T_2)$  se trouve à être un taux défini en temps discret. Définissons  $f(t, T_1, T_2)$  comme étant un taux en temps continu :

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \right) = \frac{\ln P(t, T_1) - \ln P(t, T_2)}{T_2 - T_1}$$

En appliquant le lemme d'Itô à l'équation (1), on obtient l'expression familière :

$$d \ln P(t, T_1) = \left[ r(t) - \frac{v(t, T_1, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_1, \Omega_t) dz(t) \quad (5)$$

soit l'équation décrivant l'évolution du rendement de l'obligation démunie au temps  $t$  d'échéance  $T_1$ .

On effectue cette opération une seconde fois pour car on cherche également l'évolution du rendement de l'obligation au temps  $t$  d'échéance  $T_2$ . Elle est donnée par :

$$d \ln P(t, T_2) = \left[ r(t) - \frac{v(t, T_2, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_2, \Omega_t) dz(t) \quad (6)$$

Ce qui nous intéresse ici, c'est l'équation décrivant l'évolution des taux à terme, c'est-à-dire celle décrivant  $df(t, T_1, T_2)$ . Nous savons que :

$$df(t, T_1, T_2) = d \left[ \frac{\ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1} \right] - d \left[ \frac{\ln P(t, T_2)}{T_2 - T_1} \right] = \frac{d \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1} - \frac{d \ln P(t, T_2)}{T_2 - T_1}$$

expression obtenue par simple différentiation. En substituant les valeurs de (5) et (6) dans cette équation, on obtient que :

$$df(t, T_1, T_2) = \left[ \frac{\left[ r(t) - \frac{v(t, T_1, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_1, \Omega_t) dz(t)}{T_2 - T_1} \right] - \left[ \frac{\left[ r(t) - \frac{v(t, T_2, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_2, \Omega_t) dz(t)}{T_2 - T_1} \right]$$

Les deux  $r(t)$  s'éliminant, il ne reste plus alors que  $df(t, T_1, T_2)$  exprimé en termes de volatilité, c'est-à-dire :

$$df(t, T_1, T_2) = \left[ \frac{v(t, T_2, \Omega_t)^2 - v(t, T_1, \Omega_t)^2}{2(T_2 - T_1)} \right] dt + \left[ \frac{v(t, T_1, \Omega_t) - v(t, T_2, \Omega_t)}{(T_2 - T_1)} \right] dz(t) \quad (7)$$

En effet, il est à remarquer que dans cette équation, la dérive (*drift*) dépend maintenant de la variance de  $P(t, T)$ . En d'autres termes, le processus neutre au risque décrivant l'évolution du taux à terme  $f$  dépend seulement de la volatilité. En définissant  $T_1 = T$  et  $T_2 = T + \Delta T$  et en prenant la limite de (7) quand  $\Delta T$  tends vers zéro, on obtient que le coefficient de  $dz(t)$  donné par :

$$v_T = \frac{\partial v(t, T, \Omega_t)}{\partial T} \quad (8)$$

c'est -à-dire que le coefficient de  $dz(t)$ , lorsque  $\Delta T \rightarrow 0$ , n'est autre chose que la définition de la dérivée. On tire la même conclusion pour le coefficient de  $dt$ , c'est-à-dire<sup>7</sup> :

$$\frac{\partial v(t, T, \Omega_t)^2}{\partial T} = 2v(t, T, \Omega_t)v_T(t, T, \Omega_t) \quad (9)$$

En substituant (8) et (9) dans (7) et sachant que  $df(t, T, T + \Delta T)$  est défini à la limite par  $F(t, T)$ , on obtient l'équation décrivant l'évolution du taux forward instantané :

$$dF(t, T) = v(t, T, \Omega_t)v_T(t, T, \Omega_t)dt - v_T(t, T, \Omega_t)dz(t) \quad (10)$$

---

<sup>7</sup> Comme pour l'équation de  $v_T$ , on constate que lorsque  $\Delta T \rightarrow 0$ , le coefficient de  $dt$  est effectivement la définition de la dérivée, c'est-à-dire :  $\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left[ \frac{v(t, T, \Omega_t)^2 - v(t, T + \Delta T, \Omega_t)^2}{\Delta T} \right] = \frac{\partial v(t, T, \Omega_t)^2}{\partial T}$ . Mais par la règle de

chaîne, on obtient également que :  $\frac{\partial v(t, T, \Omega_t)^2}{\partial T} = 2v(t, T, \Omega_t) \frac{\partial v(t, T, \Omega_t)}{\partial T} = 2v(t, T, \Omega_t)v_T(t, T, \Omega_t)$ . En égalisant ces deux expressions, on obtient l'équation (9), c'est-à-dire :  $\frac{\partial v(t, T, \Omega_t)^2}{\partial T} = 2v(t, T, \Omega_t)v_T(t, T, \Omega_t)$ .

Cette équation représente la contribution de Heath, Jarrow et Morton (1992)<sup>8</sup>. Il ont été les premiers à exprimer la relation qui existe entre la dérive et la volatilité du taux forward instantané. Une fois que la fonction  $v(t, T, \Omega_t)$  est spécifiée, le processus neutre au risque pour  $F(t, T)$  est connu. Par conséquent, la connaissance des  $v(t, T, \Omega_t)$  est suffisante pour définir complètement le modèle à un facteur. En intégrant  $v_T(t, \tau, \Omega_t)$  sur l'intervalle  $\tau = t$  et  $\tau = T$ , on obtient :

$$\int_t^T \frac{\partial v(t, T, \Omega_t)}{\partial T} d\tau = v(t, T, \Omega_t) - v(t, t, \Omega_t)$$

Mais comme nous savons que la volatilité à son échéance, ici  $t$ , est zéro, alors on obtient :

$$\int_t^T v_T(t, \tau, \Omega_t) d\tau = v(t, T, \Omega_t)$$

En définissant  $m(t, T, \Omega_t)$  et  $s(t, T, \Omega_t)$  comme étant, respectivement, le drift et la volatilité instantanée, on peut réécrire l'équation (10) comme suit :

$$dF(t, T) = m(t, T, \Omega_t)dt + s(t, T, \Omega_t)dz(t)$$

$$\text{où } m(t, T, \Omega_t) = s(t, T, \Omega_t) \int_t^T s(t, \tau, \Omega_t) d\tau.$$

## 2.1 Processus de taux court

En utilisant l'équation (10) qui modélise le taux forward, nous pouvons obtenir un processus risque neutre pour le taux court  $r(t)$ . Étant donné que :

$$\int_0^t dF(\tau, t) = F(\tau, t)|_0^t = F(t, t) - F(0, t)$$

et que :  $F(t, t) = r(t)$ , on obtient :

$$r(t) = F(t, t) = F(0, t) + \int_0^t dF(\tau, t)$$

Donc, en remplaçant  $dF(\tau, t)$  par sa valeur, c'est-à-dire celle donnée par l'équation (10), on obtient :

---

<sup>8</sup> Heath, D., Jarrow R. et A. Morton (1992), Bond pricing and the term structure of interest rate : A new methodology, *Econometrica*, 60, 77-105.

$$r(t) = F(0,t) + \int_0^t v(\tau, t, \Omega_\tau) v_t(\tau, t, \Omega_t) d\tau - \int_0^t v_t(\tau, t, \Omega_t) dz(\tau) \quad (11)$$

où  $t = \tau$ ,  $T = t$  et  $\tau \in [0, t]$ . En calculant la différentielle de (11), on a :

$$\begin{aligned} dr(t) &= F_t(0,t)dt + \left\{ \int_0^t [v_t(\tau, t, \Omega_t) v_t(\tau, t, \Omega_t) + v_{tt}(\tau, t, \Omega_t) v(\tau, t, \Omega_t)] d\tau \right\} dt \\ &\quad - \left\{ \int_0^t v_{tt}(\tau, t, \Omega_t) dz(\tau) \right\} dt - [v_t(\tau, t, \Omega_t)]_{\tau=t} dz(t) \\ &= F_t(0,t)dt + \left\{ \int_0^t [v(\tau, t, \Omega_t) v_{tt}(\tau, t, \Omega_t) + v_t(\tau, t, \Omega_t)^2] d\tau \right\} dt - \left\{ \int_0^t v_{tt}(\tau, t, \Omega_t) dz(\tau) \right\} dt \\ &\quad - [v_t(\tau, t, \Omega_t)]_{\tau=t} dz(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Cette équation est le résultat d'une simple application de la différentielle (dérivée) d'un produit de fonctions. Pour obtenir le dernier terme de (12), il suffit d'appliquer le résultat que la dérivée d'une intégrale est égale à l'intégrand et ensuite d'appliquer la différentielle par rapport à  $t$ , c'est-à-dire :  $v_t(\tau, t, \Omega_t)|_{\tau=t} d\left(\int_0^t dz(\tau)\right) = v_t(\tau, t, \Omega_t)|_{\tau=t} dz(t)$ .

Les deuxième et troisième termes de (12) peuvent induire le processus de  $r$  à être non markovien. La dérive de  $r$  dans l'intervalle de temps  $t$  et  $t + \Delta t$  dépend non seulement de  $r$  au temps  $t$  mais également de l'historique de  $r$  avant cette date. Cela implique que si l'on recourt à la méthode binomiale, l'arbre ne se recombina pas comme à l'accoutumée, c'est-à-dire qu'un mouvement de baisse suivi d'un mouvement de hausse ne conduira pas au même nœud qu'un mouvement de hausse suivi d'un mouvement de baisse.

Ce problème est majeur et cause des difficultés au niveau de la transposition empirique du modèle HJM. Dans le cas du modèle à un seul facteur, un arbre binomial HJM qui ne se recombine pas sera constitué de  $2^n$  nœuds après  $n$  périodes. Dans le cas d'un modèle à deux facteurs, l'arbre devra être construit dans trois dimensions et sera constitué de  $4^n$  nœuds après  $n$  périodes (ou  $n$  pas). On est à même de constater les difficultés numériques qu'un tel arbre peut causer. On a donc recours aux méthodes de simulation de Monte Carlo qui seront de toutes évidence plus efficaces du point de vue numérique.

Comme nous y avons fait allusion, le modèle HJM peut-être généralisé à plusieurs facteurs indépendants. Il ne suffit que de généraliser le terme de volatilité de l'équation de  $F$

comme suit :

$$dF(t, T) = m(t, T, \Omega_t)dt + \sum_k s_k(t, T, \Omega_t)dz_k$$

$$\text{où } m(t, T, \Omega_t) = \sum_k s_k(t, T, \Omega_t) \int_t^T s_k(t, T, \Omega_t) d\tau .$$

## 2.2 Le modèle de marché LIBOR (BGM)

L'un des défauts du modèle HJM est qu'il n'est exprimé qu'en termes du taux forward instantané, lequel n'est pas observable directement dans le marché. Un autre problème est qu'il est difficile à calibrer. Ces faits ont contribué au développement de nouveaux modèles tel celui de Brace, Gatarek et Musiela (BGM)<sup>9</sup>. Ce modèle est exprimé en termes du taux forward habituellement utilisé par les praticiens.

On utilise le modèle BGM pour effectuer le pricing de caplets. Supposons que les dates  $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ , avec  $t_0 = 0$ , représentent les dates de réajustement des caps qui se transigent dans le marché actuellement. Habituellement, du moins aux États-Unis, les caps sont réajustés tous les trimestres, ce qui permet d'écrire que :  $t_0 = 0$ ;  $t_1 = 0,25$ ;  $t_2 = 0,5$ ;  $t_3 = 0,75$ ;  $t_4 = 1$ ; ... Définissons  $\delta_k = t_{k+1} - t_k$  et avec,

$F_k(t)$  : taux forward entre les périodes  $t_k$  et  $t_{k+1}$  au temps  $t$ , en utilisant le facteur de composition  $\delta_k$  ;

$m(t)$  : est un indice pour la prochaine période de réajustement au temps  $t$ . Autrement dit,  $m(t)$  est le plus petit entier tel que  $t \leq t_{m(t)}$  ;

$\zeta_k(t)$  : la volatilité de  $F_k(t)$  au temps  $t$ ;

$v_k(t)$  : la volatilité d'une obligation démunie,  $P(t, t_k)$ , au temps  $t$ .

Afin de simplifier l'exposé, commençons par un modèle à un seul facteur. Pour clarifier certains concepts, nous faisons en annexe une petite digression sur les martingales et le concept d'un monde neutre au risque. Nous savons que dans un monde neutre au risque, connaissant  $P(t, t_{k+1})$ , alors  $F_k(t)$  est une martingale. Montrons ce point.

---

<sup>9</sup> Brace, A., Gatarek, D. et M. Musiela (1997), The market model of interest rate dynamics, *Mathematical Finance*, 7, 127-155.

Le modèle BGM peut être transposé empiriquement en ayant recours à la simulation Monte Carlo. Afin d'utiliser le modèle de marché LIBOR pour le calcul d'un cap, il suffit d'exprimer l'expression suivante :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \Lambda_{k-m(t)} dz$$

sous la forme d'une équation réursive. Pour ce faire, nous savons que cette dernière peut être réécrite comme suit :

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) e^{\left[ \left( \sum_{i=j+1}^k \frac{\delta_i F_i(t_j) \Lambda_{i-j-1} \Lambda_{k-j-1}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\Lambda_{k-j-1}^2}{2} \right) \delta_j + \Lambda_{k-j-1} \sqrt{\delta_j} \right]}$$

On remarque que cette récursion est analogue à celle utilisée pour la simulation de l'évolution du prix d'une action.

### 3. Le pricing des produits dérivés dans le modèle HJM

Supposons que  $(S - X)^+$  soit le payoff d'un produit dérivé ayant pour échéance  $T$ . Sa valeur est calculée par :

$$V_t = B_t E_Q \left( B_T^{-1} (S - X)^+ \middle| F_t \right) = E_Q \left[ e^{-\int_t^T r_s ds (S - X)^+} \middle| F_t \right] \quad (13)$$

où  $B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$ , c'est-à-dire  $\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt$  et  $B_0 = 1$ . En mots,  $B_t$  est un bon du Trésor qui donne 1

\$ à son échéance et est considéré comme le choix canonique servant de numéraire.  $F_t$  est la filtration habituelle. Elle est formée de l'histoire de l'action ou de l'obligation jusqu'au temps  $t$ . L'opérateur  $E_Q(\cdot | F_t)$  représente l'espérance conditionnelle qui dépend de deux paramètres : une mesure  $Q$  et une histoire  $F_t$ . La mesure  $Q$  nous dit quelle probabilité utiliser pour déterminer l'espérance. Cette mesure fait en sorte que le processus  $(S - X)^+$  est une martingale. Donc, si  $(S - X)^+$  est une martingale sous la mesure  $Q$  (*Q-martingale* en anglais), alors  $V_t$  en est une également. Ce résultat est d'une importance capitale en finance moderne. Il peut être

exprimé comme suit.

### 3.1 Le processus d'espérance conditionnelle d'un titre

Pour tout titre  $(S-X)^+$  (ou payoff), le processus  $E_Q((S_t - X)^+ | F_t)$  est toujours une martingale sous la mesure  $Q$ .

Le fait d'obtenir une martingale sous la mesure  $Q$  signifie simplement que leurs dérives (drifts) sont contraintes, sous la mesure  $Q$ , par un simple changement de mesure, en regard de la mesure  $P$ . En d'autres termes, le prix au marché du risque doit être le même pour toutes les obligations sinon il y aura possibilité d'arbitrage.

### 3.2 Le pricing d'obligations à coupon zéro d'échéance $s$

Si l'on désire faire le pricing d'une obligation à coupon zéro donnant 1 \$ à l'échéance  $s$  en utilisant la formule de pricing (13), il suffit de considérer le payoff  $(S-X)^+$  comme étant de valeur unitaire, alors on obtient pour la valeur de l'obligation:

$$B_t E_Q(B_s^{-1} | F_t)$$

Plus précisément,

$$P(t, s) = E_Q \left( e^{-\int_t^s r_u du} \middle| F_t \right), \quad t \leq s < T$$

On peut constater la simplicité de cette formule. En effet, toutes les obligations à coupon zéro ne sont que des espérances sous la mesure  $Q$  du taux instantané d'actualisation de la période  $t$  jusqu'à leur échéance  $s$ . Maintenant, si l'on désire valoriser l'obligation démunie  $z(t, s) = B_t^{-1} P(t, s)$ , comment peut-on la réécrire sous la mesure  $Q$ ? Selon le principe que nous avons effleuré plus haut qui dit que : toutes les autres obligations incluant celles à escompte peuvent être considérées comme des martingales sous la même mesure  $Q$ , on peut écrire que :

$$z(t, s) = E_Q(B_s^{-1} | F_t)$$

Ce concept signifie que la dérive de ces autres obligations, soit celles à escompte, est

contrainte, sous la mesure  $Q$  (martingale), par un simple changement de mesure par rapport à la mesure  $P$ . Comme nous l'avons mentionné plus haut, cela signifie que le prix du risque doit être le même pour toute obligation, sinon il n'y aura pas absence d'arbitrage.

### 3.3 Taux forwards et taux courts sous la mesure $Q$

Sous la mesure  $Q$ , les expressions des taux forwards et des taux courts peuvent maintenant s'écrire :

$$d_t f(t, T) = \sigma(t, T) d\tilde{W}_t - \sigma(t, T) \varepsilon(t, T) dt$$

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \sigma(s, t) d\tilde{W}_s - \int_0^t \sigma(s, t) \varepsilon(s, t) ds$$

où  $\varepsilon(t, T) = -\sigma(T - t)$ . On peut remarquer que, sous la mesure  $Q$ , comme les obligations elles-mêmes, ces expressions ne dépendent plus de leurs dérives respectives (drifts) mais seulement de leur volatilité  $\sigma$  et  $\varepsilon$ .

### 3. 4 Théorème de Girsanov<sup>10</sup> (CMG : Cameron-Martin<sup>11</sup> -Girsanov) et conditions du modèle HJM

En termes simples, le théorème de Girsanov peut s'exprimer comme suit. Il est un puissant outil pour contrôler le drift de tout processus de type brownien.

*Théorème de Cameron-Martin-Girsanov*

Supposons que  $W_t$  est un mouvement Brownien- $P$  et que  $\gamma_t$  est un processus prévisible sous la

filtration  $F$  qui satisfait à la condition  $E_P \left( e^{\int_0^T \gamma_t^2 dt} \right) < \infty$ , soit une borne, alors il existe une

mesure  $Q$  telle que :

<sup>10</sup> Girsanov, I.V. (1960), On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, *Theory of Probability and Its applications*, Vol. 5, no.3 : 285-301.

<sup>11</sup> Cameron, R.H. et W.T. Martin (1944), Transformations of Wiener integrals under translations, *Annals of Mathematics*, 45, no.2 : 386-396.



i)  $Q$  est équivalent à  $P$

$$\text{ii) } \frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - 0,5 \int_0^T \gamma_t^2 dt\right)^{12}$$

iii)  $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$  est un mouvement Brownien- $Q$

En d'autre termes,  $W_t$  est un mouvement Brownien- $Q$  ayant comme dérive  $-\gamma_t$  au temps  $t$ . Donc, si l'on désire transformer un mouvement brownien- $P$  en un mouvement brownien avec un certain drift  $-\gamma_t$ , alors il existe une certaine mesure  $Q$  qui fera le travail.

Plus précisément, par la propriété (iii),  $W_t = \tilde{W}_t - \int_0^t \gamma_s ds$  et  $\int_0^t \gamma_s ds = \gamma_t t - \gamma_0 0 = \gamma_t t$ . On constate

donc que le passage d'une mesure à une autre n'affecte que le drift. Pour clarifier davantage le théorème de Girsanov, considérons l'exemple suivant. Supposons que  $X$  est un processus défini par :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

où  $W_t$  est un mouvement brownien défini sous la mesure  $P$ . Supposons que l'on désire trouver une mesure  $Q$  qui fixe le drift à  $v_t dt$  plutôt qu'à  $\mu_t dt$ . La première étape à considérer est que  $dX$  peut être réécrit comme suit :

$$dX_t = v_t dt + \sigma_t \left[ \left( \frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t} \right) dt + dW_t \right]$$

En posant que  $\gamma_t = (\mu_t - v_t) / \sigma_t$  et en respectant la condition CMG de croissance  $E_Q \exp(0.5 \int_0^t \gamma_s^2 ds) < \infty$  mentionnée plus haut, alors il existe effectivement une

mesure  $Q$  telle que  $\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t (\mu_s - v_s) / \sigma_s ds$  est un mouvement brownien sous la mesure  $Q$ . Mais cela signifie que l'équation différentielle de  $X$  sous  $Q$  est donnée par :

---

<sup>12</sup> Cette dérivée se nomme dérivée de Radon-Nikodym et elle définie par :  $\frac{dQ}{dP} = \lim_{A \rightarrow \{w\}} \frac{Q(A)}{P(A)}$  où

$A = \{w' : W_{t_i}(w') = W_{t_i}(w), i = 1, 2, \dots, n\}$  est le filet (maille) ou grille du temps où les intervalles se réduisent au fur et à mesure que  $A$  tend vers  $w$ .

$$dX_t = v_t dt + \sigma_t d\tilde{W}_t$$

où  $\tilde{W}$  est un mouvement brownien sous la mesure  $Q$ , c'est-à-dire que  $d\tilde{W}_t = \gamma_t dt + dW_t$ , soit la propriété (iii). Cet exemple montre clairement que lorsqu'on passe d'une mesure à une autre, seule la dérive est affectée. La volatilité demeure inchangée.

#### *Théorème de représentation par la martingale*

Supposons que  $M_t$  soit un processus  $Q$ -martingale avec une volatilité  $\sigma_t$  non nulle. Alors si  $N_t$  est tout autre  $Q$ -martingale, il existe une filtration unique  $F$ -prévisible  $\phi$  telle que

$\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$  avec certitude et  $N$  peut être écrit comme étant :

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s$$

Essentiellement, ce théorème est similaire à celui du théorème de la représentation binomiale. Ce théorème dit ceci. Si  $M_t$  et  $N_t$  sont des  $P$ -martingales, alors ils ne diffèrent localement que par un facteur d'échelle (*scaling*). On peut représenter les changements dans  $N_t$  par des changements ajustés dans l'autre  $P$ -martingale.  $N_t$  peut donc se représenter par la somme ajustée de ces changements.

#### **4. Modèle HJM à un facteur : conditions d'un marché complet**

Pour avoir un marché complet, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

i) il existe un processus  $\gamma_t$  sous la filtration  $F$ , telle que :

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)(\gamma_t - \varepsilon(t, T)), \quad \forall t \leq T;$$

ii) le processus  $A_t = \varepsilon(t, T)$  est différent de zéro pour presque tout  $(t, \omega)$ ,  $t < T$ , et pour toute échéance  $T$ ;

iii) l'espérance  $E \left( e^{\int_0^T \gamma_t^2 dt} \right) < \infty$ ;

iv) l'espérance  $E \left( e^{\int_0^T 0,5 (\gamma_t - \varepsilon(t,T))^2 dt} \right)$  est également finie.

La première condition est nécessaire et suffisante pour garantir l'absence d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il existe une mesure équivalente sous laquelle chaque prix de bons est une martingale. L'importance de cette condition réside dans le fait qu'elle impose une contrainte sur le drift. En effet, comme  $\gamma_t$  est seulement une fonction du temps et non de l'échéance des bons, le drift doit prendre la valeur  $-\sigma(t,T)\varepsilon(t,T)$  corrigée de  $\gamma_t\sigma(t,T)$ . Étant donné que  $\sigma(t,T)$  et  $\varepsilon(t,T)$  sont déterminés par les volatilités des taux forwards, le seul degré de liberté du drift provient du processus  $\gamma_t$ . A la différence des modèles simples de valorisation d'actifs, le drift est contraint à prendre certaines formes fonctionnelles. La deuxième condition stipule que le changement de mesure est unique. Cela implique que tout le risque peut être couvert (diversifié) en utilisant le théorème de représentation de martingale. Les deux autres conditions concernent le théorème CMG. Elles sont requises pour l'application de ce théorème et pour s'assurer que  $z$  est une martingale sous la nouvelle mesure.

## 5. Certains modèles de taux court conformes au cadre HJM

Sans avoir la prétention d'être exhaustive, cette section couvre certains modèles populaires de taux court et certains résultats importants et utiles dans la pratique. Les modèles qui suivent sont à la base des modèles d'équilibre qui ont été transformés pour devenir des modèles d'arbitrage. Cette transformation permet au drift d'être fonction du temps et ainsi de s'ajuster parfaitement à la structure des taux d'intérêt observée. Nous présentons également en fin de section une application Matlab.

### 5.1 Modèle de Ho et Lee<sup>13</sup> en termes HJM

Dans ce modèle, l'évolution du taux court  $r_t$  est modélisée par :

---

<sup>13</sup> Ho, T.S.Y et S.B. Lee (1986), Term structure movements and pricing of interest rate contingent claims, *Journal of Finance*, 41:1011-1029.

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$$

On note ici que la dérive est une fonction du temps, ce qui permet au modèle de reproduire la courbe des rendements observés. Sous la mesure Q, le modèle Ho et Lee en termes du HJM peut se spécifier comme :

$$d_t f(t, T) = \sigma dW_t + \sigma^2 (T - t) dt$$

où le taux forward prend la forme  $f(0, T) = \frac{\partial g}{\partial T}(r_0, 0, T) = r_0 - 0,5\sigma^2 T^2 + \int_0^T \theta_s ds$

et où  $g(x, t, T) = x(T - t) - \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3 + \int_t^T (T - s)\theta_s ds$ . Ce résultat peut être obtenu par le

lemme d'Itô. De façon équivalente, l'évolution des prix des obligations à coupon zéro en termes HJM peut s'écrire :

$$P(t, T) = e^{-\left(\sigma(T-t)W_t + \int_t^T f(0, u)du + 0,5\sigma^2 T(T-t)t\right)}$$

Le pricing d'options est similaire pour les obligations au pricing d'actions. En effet, une option européenne sur une obligation donne le droit d'acheter une obligation à une date future à un prix d'exercice donné k. En terme d'espérance et de mesure Q, une option d'achat européenne sur une obligation démunie  $P(t, T)$  avec comme prix d'exercice k prend la forme suivante :

$$V_0 = E_Q\left(B_t^{-1}[P(t, T) - k]^+\right)$$

Étant donné que le modèle de Ho et Lee est lognormal, on obtient la solution analytique suivante, pour l'option d'achat européenne :

$$V_0 = P(0, t) \left( F \Phi \left( \frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) + 0,5\sigma^2(T-t)^2}{\sigma(T-t)\sqrt{t}} \right) - k \Phi \left( \frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) - 0,5\sigma^2(T-t)^2}{\sigma(T-t)\sqrt{t}} \right) \right)$$

où  $F = P(0, T) / P(0, t)$  et  $\sigma(T - t)$  est la volatilité à terme, c'est-à-dire que  $[\sigma(T - t)]^2 t$  est la variance logarithmique de  $P(t, T)$ .  $k$  est le prix d'exercice.

## 5.2 Modèle de Vasicek<sup>14</sup> et de Hull&White<sup>15</sup> en termes HJM

L'évolution du taux court est supposée un processus de retour vers la moyenne :

$$dr_t = (\theta_t - \alpha r_t)dt + \sigma dW_t$$

où  $\alpha$  mesure la vitesse d'ajustement de  $r_t$  vers la moyenne  $\theta_t$ . Si  $\alpha = 0$ , on constate un ajustement instantané.

Sous la mesure  $Q$ , le modèle de Vasicek en termes HJM peut s'écrire :

$$\sigma(t, T) = \sigma e^{-(\alpha(T-t))}$$

et où le taux forward s'écrit  $f(0, T) = \theta / \alpha + e^{-\alpha T} (r_0 - \theta / \alpha) - \sigma^2 / 2\alpha^2 (1 - e^{-\alpha T})^2$ . Les prix des obligations démunies sont lognormaux et prennent la forme suivante :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{-[r(t) - f(0, t)]X(t, T) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} X^2(t, T)(1 - e^{-2\alpha t})}$$

$$\text{où } \frac{P(0, T)}{P(0, t)} = \exp\left(-\int_0^T f(0, u)du\right) \times \exp\left(\int_0^t f(0, u)du\right) \text{ et } X(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}.$$

En comparaison avec le modèle de Ho et Lee, celui de Vasicek est considéré comme le modèle le plus général à un facteur tout en restant lognormal. L'option d'achat européenne est également donnée par :

$$V_0 = P(0, t) \left( F\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) + 0,5[\sigma(T-t)]^2}{\sigma(T-t)\sqrt{t}}\right) - k\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F}{k}\right) - 0,5[\sigma(T-t)]^2}{\sigma(T-t)\sqrt{t}}\right) \right)$$

La seule différence avec le modèle précédent est que la volatilité suit un processus exponentiel simple.

<sup>14</sup> Vasicek, O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure , *Journal of Financial Economics*, 5:177-188.

<sup>15</sup> Hull, J.C. et A.D. White (1993), One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28:235-254.

### 5.3 Modèle de Cox-Ingersoll -Ross<sup>16</sup> augmenté en termes HJM

Dans le modèle CIR augmenté , c'est-à-dire dont les paramètres dépendent du temps, le processus du taux court prend la forme suivante:

$$dr_t = (\theta_t - \alpha_t r_t)dt + \sigma_t r_t^{1/2} dW_t$$

où  $\theta_t, \alpha_t$  et  $\sigma_t$  sont des fonctions déterministes du temps. Il est difficile de trouver une solution pour le sentier que prend  $r_t$ . La solution d'une certaine équation différentielle, nommée équation différentielle de Ricatti, n'a pas de solution analytique mais admet toutefois une solution numérique.

La structure de volatilité du modèle CIR en termes du modèle HJM prend la forme suivante :

$$\sigma(t, T) = \sigma_t \sqrt{r_t} D(t, T)$$

$$\varepsilon(t, T) = -\sigma_t \sqrt{r_t} B(t, T)$$

avec  $f(0, T) = r_0 D(0, T) + \int_0^T \theta_s D(s, T) ds$  où  $D(t, T) = \frac{\partial B}{\partial T}(t, T)$  et où  $B(t, T)$  est la solution de

l'équation différentielle de Ricatti. Cette équation est donnée par :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0,5\sigma_t^2 B^2(t, T) + \alpha_t B(t, T) - 1$$

où  $B(T, T) = 0$ . Dans ce modèle le prix de l'obligation démunie est donné par :

$$P(t, T) = e^{-g(r_t, t, T)}$$

où  $g(r_t, t, T) = r_t B(t, T) + \int_t^T \theta_s B(s, T) ds$

---

<sup>16</sup> Le modèle CIR initial sans paramètres temporels se retrouve dans: Cox, J.C., Ingersoll, J.E. et S.A. Ross(1985), A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53:385-407.

## 5.4 Modèle de Black & Karasinski<sup>17</sup>

Une autre façon de forcer le taux court à être positif est de recourir à une forme exponentielle. Ce modèle est une extension du modèle de Black-Derman et Toy et suppose une variable  $X_t$  suivant un processus général Ornstein-Uhlenbeck de Vasicek.

Le modèle de Black & Karasinski pour la variable  $X_t$  s'écrit comme suit :

$$dX_t = (\theta_t - \alpha_t X_t)dt + \sigma_t dW_t$$

où  $\theta_t$ ,  $\alpha_t$  et  $\sigma_t$  sont des fonctions déterministes du temps. Le taux court (instantané) est supposé donné par :

$$r_t = e^{X_t}$$

$X_t$  est supposé normal et par conséquent  $r_t$  est lognormal. Ce modèle est cohérent avec HJM, c'est-à-dire qu'il existe une surface de volatilité  $\sigma(t, T)$  qui peut générer un modèle HJM à un facteur et qui possède le même taux instantané que celui que l'on vient de décrire.

## 5.5 Options sur obligation à coupons

Le prix d'une obligation à coupon constant à  $T_0$  qui paye 1 dollar à  $T_n$  est donné par :

$$P(T_0, T_n) + k\delta \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)$$

où  $k$  est le taux d'actualisation des coupons qui sont effectués aux temps  $T_i = T_0 + i\delta$ .  $\delta$  est la fréquence de paiements (en général, à tous les six mois) et  $k\delta$  représente le nombre d'unités de chaque bon représenté par  $P(T_0, T_i)$ . Pour que le prix initial soit la valeur faciale du bon, alors le taux du coupon doit être donné par :

$$k = \frac{1 - P(T_0, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)}$$

La valeur de cette obligation au temps  $t$  qui paye des coupons au taux  $k$  au temps  $T_i = T_0 + i\delta$

---

<sup>17</sup> Black, F. et P. Karasinski (1991), Bond and option pricing when short rate are lognormal, *Financial Analyst Journal*, July-Aug:52-59.

est donc donnée par :

$$P_t = P(t, T_n) + k\delta \sum_{i=I(t)}^n P(t, T_i)$$

où  $I(t) = \min\{i : t < T_i\}$  est une séquence de nombres correspondant aux coupons suivant  $t$ . Cette modification de la formule initiale est nécessaire car nous calculons maintenant l'obligation à coupons au temps  $t$ . En utilisant le résultat développé par Jamshidian (1989)<sup>18</sup>, on peut obtenir la valeur d'une option d'achat européenne sur une obligation avec coupons qui est donnée par :

$$(C_t - K)^+ = (P(t, T_n) - K_n)^+ + k\delta \sum_{i=I(t)}^n (P(t, T_i) - K_i)^+$$

Une option sur obligation à coupons est donc un portefeuille d'options sur obligations démunies et l'on peut donc utiliser les formules précédentes pour valoriser chacune d'entre elles. Notons ici que nous nous consacrons au pricing d'options européennes.

Pour le cas des options américaines, il est possible d'élargir ce dernier concept par le biais des arbres binomiaux par exemple. En effet, il suffit d'appliquer une méthodologie similaire à l'arbre de Black-Derman et Toy pour le cas des coupons mais en tenant compte de la possibilité d'exercice à chaque nœud des arbres des coupons et en additionnant les arbres obtenus pour obtenir l'arbre final.

## 5.6 Modèles multifactoriels

### Modèle à deux facteurs en termes HJM.

Supposons que le taux à terme évolue selon l'équation différentielle suivante:

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)} dW_2(t)$$

où  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\lambda$  sont des constantes. Les deux facteurs, c'est-à-dire les deux sources d'incertitude, sont deux mouvement browniens  $W_1$  et  $W_2$ .  $W_1$  donne les chocs qui affectent en

---

<sup>18</sup> Jamshidian, F. (1989), An exact bond pricing formula, *Journal of Finance*, 44 :205-209.



tout point de toute échéance la courbe des rendements à l'échéance.  $W_2$  donne des chocs à court terme qui n'affecteront que très peu les segments à long terme de la courbe, c'est-à-dire les points extrêmes de cette courbe. Le drift est donné par :

$\alpha(t, T) = \sigma_1 \gamma_1(t) + \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)} \gamma_2(t) + \sigma_1^2 (T-t) + \frac{\sigma_2^2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t)}) e^{-\lambda(T-t)}$ . Dans ce modèle le taux à terme est de :

$$f(t, T) = \sigma_2 e^{-\lambda T} \int_0^t e^{\lambda s} dW_2(s) + f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \sigma_1 W_1(t)$$

Comme dans le cas Ho et Lee, les taux forwards sont distribués normalement: ils peuvent donc être négatifs. Ce problème est compensé par le fait qu'on peut trouver une forme analytique pour l'option. Les taux courts instantanés sont donnés par :

$$r_t = \sigma_2 e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dW_2(s) + f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \sigma_1 W_1(t)$$

Les taux forwards et les taux au comptant ont donc la même solution. On reconnaît celle-ci comme étant la solution d'un processus de retour vers la moyenne Ornstein-Uhlenbeck auquel s'ajoute un drift et un mouvement brownien.

L'option sur obligation démunie (bon) à deux facteurs prend la forme suivante:

$$V_0 = P(0, t) \left( F \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{F}{k} \right) + 0,5 \bar{\sigma}^2(t, T)}{\bar{\sigma}(t, T)} \right) - k \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{F}{k} \right) - 0,5 \bar{\sigma}^2(t, T)}{\bar{\sigma}(t, T)} \right) \right)$$

où  $\bar{\sigma}^2(t, T) = \sigma_1^2 (T-t)t + \left( \frac{\sigma_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t)}) \right)^2 \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t})$  est la variance de  $\log(P(t, T))$  et où

$F = P(0, T)/P(0, t)$  est le prix à terme de l'obligation démunie.

### Modèle à plusieurs facteurs

Le processus de taux forward est donné par :

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sum_{i=1}^n y_i(T) x_i(t) dW_i(t)$$

Le drift s'écrit :

$$\alpha(t, T) = \sum_{i=1}^n x_i(t) y_i(t) (\gamma_i(t) + x_i(t) Y_i(t, T))$$

Et la volatilité :

$$\sigma_i(t, T) = \sigma_i(t) e^{-\lambda_i(T-t)}$$

où  $\sigma_i(t)$  est une fonction déterministe du temps et où les  $\lambda_i$  sont des constantes distinctes.

Pour le cas général où la surface de volatilité (*volatility surface*) est donnée par :  $\sigma_i(t, T) = x_i(t) y_i(T)$ , le taux au comptant et le taux forward sont distribués normalement. En conséquence, les prix des obligations démunies sont lognormaux. On obtient ainsi une forme analytique du type de Black-Scholes. En supposant que  $F = P(0, T) / P(0, t)$  et que la volatilité à terme du bon jusqu'à  $t$ , c'est-à-dire  $\sigma^2 t$ , est la variance de  $\log(t, T)$ , où

$$\sigma^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n Y_i^2(t, T) \int_0^t x_i^2(s) ds,$$

alors la valeur au temps 0 d'une option européenne sur un bon au prix d'exercice  $k$  est donnée par :

$$V_0 = P(0, t) \left( F \Phi \left( \frac{\ln \frac{F}{k} + 0,5 \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - k \Phi \left( \frac{\ln \frac{F}{k} - 0,5 \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right)$$

### **Modèle de Brace, Gatarek et Musiela (BGM)<sup>19</sup> en termes HJM avec application au pricing du caplet et de swaptions**

Le modèle de BGM est un cas particulier du modèle de HJM où l'on s'intéresse seulement au taux LIBOR d'une durée  $\delta$ . Ici nous discutons sa version multivariée à  $n$  facteurs.

---

<sup>19</sup> Brace, A., Gatarek, D, et M. Musiela (1997), The market model of interest rate dynamics, *Mathematical Finance*, 7:127-155.

De façon générale, le pricing d'un caplet est donné par :

$$V_t = P(t, T_{i+1}) E_{P_{T_{i+1}}} (f(L(T_i)) | F_t)$$

c'est-à-dire l'équation habituelle en termes d'espérance. Dans cette équation,  $L$  est donné par (sous la mesure forward  $P_{T+\delta}$ ) :

$$d_t L(t, T) = L(t, T) \sum_{i=1}^n \gamma_i(t, T) d\tilde{W}_i(t)$$

où  $\gamma_i(t, T) = f(t) \gamma_i(T - t)$  et  $L(t, T)$  représente le taux forward LIBOR de durée  $\delta$  d'emprunt au temps  $T$ . Ce taux forward LIBOR est donné par :  $L(t, T) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} - 1 \right)$ .

L'équation différentielle de  $L$  est importante car elle nous indique que non seulement  $L(t, T)$  est une martingale mais est également lognormal. Ce résultat permet d'écrire les solutions analytiques pour le pricing de caplets et de swaptions européens. BGM postulent une fonction pour  $\gamma$  qui est donnée par :

$$\gamma_i(t, T) = f(t) \gamma_i(T - t)$$

Cette fonction doit être calibrée aux données connues sur les caps.

Donc, puisque  $L(T_i)$  soit lognormal,  $f$ , la valeur d'un caplet ayant comme payoff  $\delta(L(T_{i-1}) - k)^+$  au temps  $T_i$  sous BGM, est la solution analytique du type Black-Scholes donnée par :

$$V_t = \delta P(t, T_i) \left\{ F \Phi \left( \frac{\ln \frac{F}{k} + 0,5 \zeta^2(t, T_{i-1})}{\zeta(t, T_{i-1})} \right) - k \Phi \left( \frac{\ln \frac{F}{k} - 0,5 \zeta^2(t, T_{i-1})}{\zeta(t, T_{i-1})} \right) \right\}$$

où  $F$  est le taux forward LIBOR de  $L(t, T_{i-1})$  et  $\zeta^2$ , la variance de  $\ln L(T)$  qui se représente mathématiquement par  $\int_t^T |\gamma(s, T)|^2 ds$ .

Le pricing de swaptions sous BGM est également de la même simplicité.

Considérons un option de payer un taux fixe  $k$  et de recevoir un taux flottant au temps  $T_i = T_0 + i\delta$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Supposons également que la variance de  $\ln L(T_0, T_{i-1})$ , sous la mesure forward  $P_{T_i}$ , soit notée  $\Gamma_i^2$  et qui se représente mathématiquement par :  $\int_t^{T_0} |\gamma(s, T_{i-1})|^2 ds$ . Sachant que  $L(T_{i-1})$  est lognormal, alors on obtient encore une fois un résultat du type Black-Scholes, donné par :

$$V_t = \delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \left\{ L(t, T_{i-1}) \Phi\left(\frac{F_i + 0,5\Gamma_i^2}{\Gamma_i}\right) - k \Phi\left(\frac{F_i - 0,5\Gamma_i^2}{\Gamma_i}\right) \right\}$$

où  $F_i = -\Gamma_i(s_0 + d_i)$  et  $d_i = \sum_{j=1}^i \frac{\delta L(t, T_{j-1})}{1 + \delta L(t, T_{j-1})} \Gamma_j - 0,5\Gamma_i$ . Il est à noter que ce résultat, dans ce cas particulier, n'est qu'une approximation au temps  $t$  d'un swaption.

## 6. Une application Matlab du pricing sous HJM.

Dans le tableau qui suit, nous présentons un exemple de la fonction Matlab *hjmprice* tirée de la 'Toolbox' Matlab *finderiv*.

Illustrons l'utilisation de cette fonction en effectuant le pricing d'une option sur obligation démunie en recourant à l'arbre HJM. Supposons les informations sur les taux forwards inclus dans le fichier *deriv*. Supposons également que l'on veut valoriser par l'arbre HJM une option d'achat sur une obligation aux caractéristiques suivantes :

prix d'exercice : 100\$;

date d'exercice : 1 janvier 2003;

date d'émission de l'obligation : 1 janvier 2000;

date d'échéance de l'obligation : 1 jan 2004

Il faut d'abord fournir l'information sur les taux à terme à Matlab. Dans notre exemple, cette information est dans le fichier *deriv*. Ensuite, on utilise la fonction Matlab *optbndbyhjm(.)*. Voici les commandes qu'il faut écrire d'obtenir le prix de l'option d'achat.

---

```
>> load deriv
```

```
>> price = optbndbyhjm(HJMTTree,'Call','100','01-Janv-2003','0','0.05','01-Jan-2000','01-Jan-2004')
```

Warning: Not all cash flows are aligned with the tree. Result will be approximated.

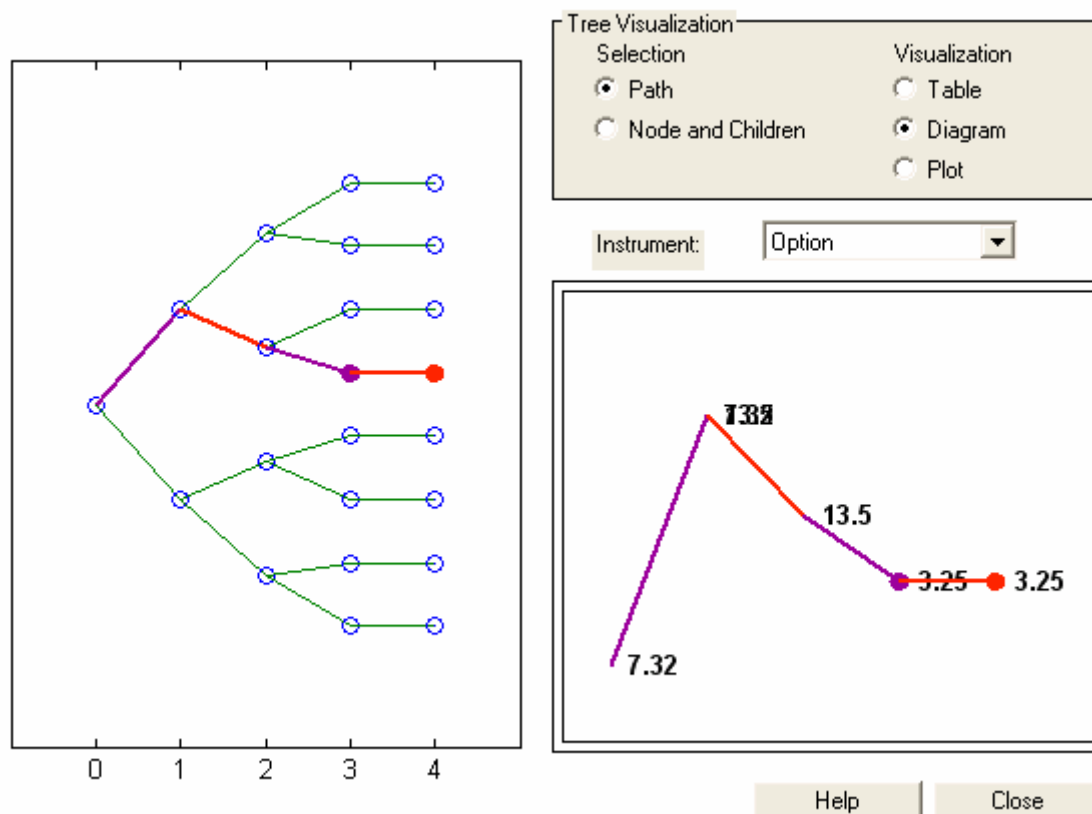
```
> In C:\MATLAB6p1\toolbox\finderiv\finderiv\optbndbyhjm.m at line 209
```

price =

8.4448

---

Le prix est donc de 8,44\$ étant donné les informations que nous avons fournies. On peut également faire la représentation graphique de l'arbre HJM à l'aide de la fonction *treeviewer*...



## Conclusion

Les modèles HJM et LMM<sup>20</sup> (BGM) procurent une approche pour évaluer les produits dérivés sur taux d'intérêt qui laisse à l'utilisateur l'opportunité de choisir la structure à terme de volatilité. L'un des avantages du modèle LMM sur le modèle HJM est le fait qu'il est développé autour des taux forwards alors que le modèle HJM utilise le taux forward instantané. Un autre avantage du modèle LMM est sa relative facilité au chapitre du calibrage. Par contre, les deux modèles ont un défaut qui se situe au niveau de la complexité numérique de leur mise en oeuvre. En effet, ces deux modèles donnent lieu, entre autres, à un arbre binomial qui ne se recombine pas. Une solution à ce problème est le recours aux méthodes de simulations de Monte Carlo. Cette méthode a l'avantage d'être polyvalente et lorsque qu'elle est utilisée avec des méthodes de réduction de la variance, elle a également la qualité numérique d'être relativement efficace.

Les modèles HJM et LMM ont la capacité de pouvoir s'appliquer à différentes situations rencontrées dans la pratique. Par exemple, le modèle BGM (LMM) est très utilisé en pratique pour effectuer le pricing des produits dérivés tels les *ratchet caps*, les *sticky caps* ou les *flexi caps*. Dans ces cas, on utilise souvent des modèles multifactoriels pouvant aller jusqu'à trois facteurs, ceux-ci pouvant générer dans certains cas des résultats de qualité supérieure aux modèles de base. Dans les applications les plus récentes de ces modèles, on compte le cas *Mortgage-Backed Securities (MBS)*. Ces produits financiers ressemblent fortement aux titres à revenus fixes habituels sauf qu'ils requièrent l'estimation d'une fonction de prépaiement afin de déterminer la probabilité de remboursement des hypothèques. Cette fonction décrit le comportement de l'espérance des remboursements du portefeuille d'hypothèques au temps  $t$  en termes de la courbe des rendements à l'échéance au temps  $t$  et d'autres variables explicatives. Considérons l'évaluation d'un *MBS* par la simulation de Monte Carlo. On utilise le modèle HJM ou LMM pour simuler le comportement des taux d'intérêt mois par mois durant toute la durée du MBS. Donc, à chaque mois, la probabilité de remboursement est calculée à partir de la courbe actuelle des rendements à l'échéance et de l'historique de ses changements. La fonction de remboursement détermine les cash-flows anticipés du détenteur de MBS et ces cash-flows sont ensuite actualisés au temps zéro pour obtenir une valeur échantillonnale du MBS. Un estimé de la valeur du MBS est obtenu en

---

<sup>20</sup> LMM : Libor Market Model.

effectuant la moyenne de ces échantillons sur un grand nombre de simulations. L'un des produits dérivés sur taux d'intérêt de plus en plus en vogue dans ce domaine est la CMO (*Collateralized Mortgage Obligation*). Un CMO est un MBS où les investisseurs sont divisés en trois classes : A, B et C. Les classes A, B et C représentent des titres de différents niveaux de risque. Les titres de la classe A sont ceux qui possèdent le risque le plus important de remboursement du portefeuille d'hypothèques, C étant celle qui a le plus faible risque de remboursement. Finalement, les ingénieurs financiers ont développé récemment toutes sortes d'autres produits qui ont une structure encore plus exotique toujours basés sur HJM ou LMM. Les IO (*interest only*) ou PO (*principal only*) sont des exemples de titres connus sous le nom de *stripped MBS* où le principal est séparé des revenus d'intérêt. Les PO et IO sont des titres risqués. A mesure que le taux de remboursement augmente, les PO deviennent de plus en plus chers et inversement pour les IO. Dans le cas d'un PO, un montant fixe du principal est retourné vers l'investisseur mais le timing est incertain. Dans le cas d'un IO, se sont les cash-flows totaux qui sont incertains. Plus le taux de remboursement des hypothèques est élevé, moins les cash-flows reçus par l'investisseur le sont. Finalement, une application intéressante des modèles cohérents avec HJM<sup>21</sup> concerne les contrats à terme (CAT). En effet, certains CAT ont des options de livraison. Par exemple, un vendeur de CAT pourra éventuellement bénéficier d'une option de livraison qui est répartie sur 4 dimensions, soit : le lieu, le temps, la quantité et la qualité. Dans le cas d'un CAT sur obligations, le vendeur pourra jouer sur trois options concernant le temps: 1) sur les intérêts courus; 2) le malin (ou joker); et, 3) la fin de mois. Sans entrer dans les détails, considérons la première. En 1), il retarde le jour si le titre-support, à taux nominal  $r$ , rapporte plus d'intérêt qu'un titre monétaire offrant  $x$ , et il avance le jour si  $x > r$ . L'importance d'évaluer ces options est sans contredit capital. En effet, les options de livraison pourront influencer le prix des CAT de telles sorte qu'elles mettent en cause l'efficacité de couverture. Par exemple, pour l'option de qualité, Yu (1997)<sup>22</sup> utilise la méthode HJM, entres autres, et Lin & Paxson (1995)<sup>23</sup> y recourent également en plus de l'appliquer pour l'évaluation d'options de nouvelles émissions.

Terminons notre discussion en discutant au passage l'évolution vers laquelle semble se diriger ce type de modélisation en considérant l'application suivante. Une nouvelle classe de

<sup>21</sup> A ce sujet, on consultera : Bellier-Delienne, A. (2005), Synthèse sur les options de livraison dans les contrats à terme, *FINÉCO*, 12.

<sup>22</sup> Yu, S. (1997), Term Structure of Interest Rates and Implicit Options : The Case of Japanese Bond Futures, *Journal of Business Finance and Accounting*, 24, 593-614.

<sup>23</sup> Lin, B. et D. Paxson (1995), The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, *Journal of Banking & Finance*, 21, 101-126.

produits dérivés exotiques sur taux d'intérêt qui émerge présentement est appelée TARN<sup>24</sup> (*Targeted Redemption Notes*). En effet, comme Piterbargs (2006)<sup>25</sup> l'explique, les TARN sont des *structured notes* (produits structurés) et sont assimilables à des obligations où l'investisseur cède le principal au vendeur en retour d'un flux de coupons et du remboursement d'un principal à l'échéance de la note. Les investisseurs sont intéressés au taux de rendement le plus élevé possible. La manière habituelle de rehausser le coupon payé à l'investisseur est de rendre le titre (note) rachetable (*callable*) du type bermudien. Le problème avec ce type de titre est que l'investisseur n'est aucunement lié au titre dans la mesure où il n'a aucun moyen de savoir quant le call bermudien sous-jacent au titre sera exercé. L'innovation en ce qui a trait à ce nouveau type de produit dérivé exotique est qu'un coupon structuré est versé à l'investisseur. Le rendement total, c'est-à-dire la somme des coupons payés jusqu'à présent, fait l'objet d'un suivi au cours du temps et lorsqu'il dépasse la cible (ou *target*, d'où le nom de ce titre) du contrat, alors le titre est considéré comme étant échu. Donc, aucun autre coupon ne sera payé et le principal sera remboursé à l'investisseur. En général, les émetteurs de ce type de produits dérivés complexes ne les détiennent pas dans leurs livres mais ont tendance à les swapper à travers leurs trading desks spécialisés en produits dérivés exotiques sur taux d'intérêt. Le principal payé par l'investisseur sera réinvesti au taux LIBOR. Donc, du point de vue des trading desks, les TARN ressemblent à un swap exotique de type digital défini sur le total des coupons structurés. Du côté du calcul, mentionnons que les TARN requièrent un modèle plus évolué que ceux présentés dans notre chapitre. Entre autres, un modèle dit *skew-extended forward Libor*<sup>26</sup> à un facteur semble suffisant comme modèle de base pour obtenir des résultats adéquats. Sur le plan numérique, les TARN ne présentent aucune difficulté inhabituelle, c'est-à-dire que, comme ils sont des contrats *path-dependent* sans caractéristiques d'exercice optimal, une simulation de Monte

<sup>24</sup> McDonald (2006) présente un excellent chapitre sur les notes structurées.

<sup>25</sup> Piterbarg, V.V. (2006), TARNs : Models, Valuation, Risk Sensitivities, in *The Best of Wilmott 2*, Wiley.

<sup>26</sup> Le processus décrivant le taux forward à l'allure suivante :

$$dF_n(t) = \lambda_n(t)\phi(F_n(t))dW^{T_{n+1}}(t), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad t \in [0, T_n]$$
 où  $\phi(x) = ax + b$  est une fonction linéaire. Ce choix particulier de  $\phi$  donne un modèle de type *displaced-diffusion*. Un autre choix populaire de cette fonction est donné par :  $\phi(x) = x^c$ , qui donne lieu à modèle de type CEV. En définissant  $F_n(t) = F_n(T_n)$ ,  $t > T_n$  et en choisissant comme numéraire le marché monétaire  $B_t$  où :  $B_{T_0} = 1$ ,  $B_{T_{n+1}} = B_{T_n} \times (1 + \delta_n F_n(T_n))$ ,  $1 \leq n \leq N$ ,  $B_t = P(t, T_{n+1})B_{T_{n+1}}$ ,  $t \in [T_n, T_{n+1}]$ . La dynamique suivie par tous les taux d'intérêt Libor forwards sous la même mesure, soit la mesure associée à  $B_t$ , est donnée par :

$$dF_n(t) = \lambda_n(t)\phi(F_n(t)) \sum_{j=1}^n \frac{1_{\{t < T_j\}}}{1 + \delta_j F_j(t)} \frac{\delta_j \phi(F_j(t))}{\lambda_j(t)} \lambda_j(t) dt + \lambda_n(t)\phi(F_n(t))dW(t), \quad n=1, \dots, N-1$$
 où  $dW$  est un mouvement Brownien sous cette mesure.



Carlo comme solution numérique est simple à mettre en oeuvre. Par contre, les TARN sont discontinus du type digital (knocks out) et les erreurs de simulation sont plus grandes pour les payoffs non lisses. Le bruit généré dans les simulations pour évaluer les titres digitaux est plutôt grand et une solution pour l'atténuer est d'augmenter le nombre de sentiers simulés. Mais un problème subsiste toujours et il est du côté de l'évaluation des grecs, c'est-à-dire du delta, gamma, et du vega, qui sont généralement utilisés dans ce contexte. En ce qui concerne le calcul des grecs, la méthode de simulation de Monte Carlo est considérée comme limitée et certaines solutions ont été proposées pour améliorer cette situation<sup>27</sup>. Les méthodes de : *smoothing by conditioning*, *smoothing by sausage* Monte Carlo, consistent à lisser les discontinuités des payoffs de façon à réduire le bruit. Mais elles ont le désavantage d'être lentes en termes du temps de calcul et plus ou moins précises. La méthode de projection locale qui consiste à trouver un modèle simple local qui est calibré en tenant compte du modèle global, soit notre modèle forward libor, est une façon d'approximer la valeur du modèle global. Andersen (2001, 2004)<sup>28</sup> discute une telle approche dans le cadre d'un swaption bermudien. Par exemple dans cette approche, un modèle simple du type Hull-White à un facteur peut être construit et calibré de façon à respecter la volatilité du modèle global. Cette approche est applicable dans le contexte des TARN et permet d'améliorer la qualité et l'efficacité de l'estimation des lettres grecques. Mentionnons en terminant que l'effet smile devrait également être pris en considération pour le cas des TARN. Le modèle de Hull-White est suffisamment flexible et parcimonieux pour être calibré aux volatilités à terme et aux corrélations intertemporelles des taux Libor. Mais en ce qui concerne l'effet du smile, il faut avoir recours à une extension de celui-ci, connue sous le nom de modèle de Cheyette<sup>29</sup> à volatilité stochastique (SV-Cheyette).

<sup>27</sup> A ce sujet, on consultera : Glasserman, P. (2003), *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer.

<sup>28</sup> Andreasen, J. (2001), The pricing of Bermudean swaptions. Risk conference, Paris; Andreasen, J. (2004), Markov yield curve models for exotic interest rate products, Lecture notes.

<sup>29</sup> Le modèle SV-Cheyette est donné par le système d'équations suivant:

$$dx(t) = (-v(t)x(t) + y(t))dt + \sqrt{V(t)\eta(t, x(t), y(t))}dW(t), \quad x(0) = 0,$$

$$dy(t) = (V(t)\eta^2(t, x(t), y(t)) - 2v(t)y(t))dt, \quad y(0) = 0$$

$$dV(t) = \mathcal{G}(\theta - V(t))dt + \varepsilon\psi(V(t))dZ(t), \quad V(0) = 1,$$

$\langle W, Z \rangle = 0$  où  $x(\cdot)$  est le processus décrivant le taux court,  $y(\cdot)$  est une variable auxiliaire conditionnée par  $V(\cdot)$ ,

la variance stochastique,  $\eta(t, x, y)$ , une volatilité locale. Dans ce modèle, les taux courts instantanés sont donnés par :  $r(t) = f(t, t) = f(0, t) + x(t)$ . Le modèle de Hull-White est obtenu en imposant la restriction :

$\eta(t, x(t), y(t)) \equiv \eta(t)$ . Pour plus de détails à ce sujet, on consultera : Andersen, L.B.G., Andreasen, J. (2002), Volatile Volatilities, *Risk*, 15(12), December.

## Appendice

### Rappel sur les martingales<sup>30</sup>

Une martingale est un processus stochastique sans dérive. Soit une variable  $P$  qui est une martingale, alors elle est définie par :

$$dP = \sigma dz$$

où  $dz$  est un processus de Wiener. La variable  $\sigma$  peut être elle-même définie par un processus stochastique. Elle peut dépendre de  $P$  ou d'autres variables stochastiques. Une propriété désirable d'une martingale est que son espérance à toute date future est égale à sa valeur actuelle (valeur aujourd'hui), soit :

$$E(P_T) = P_0 \quad (1)$$

où  $P_0$  et  $P_T$  sont les valeurs de  $P$  aux temps 0 et  $T$ , respectivement. Une différence de martingale est alors définie par :

$$E(P_T - P_0) = E(P_T) - P_0$$

et elle est égale à 0 dans ce cas. La différence de martingale mesure en l'occurrence le changement espéré. Pour interpréter ce résultat, considérons ce qui suit. En supposant que de petits changements de  $P$  sont distribués normalement avec une moyenne de 0, l'espérance de la variation de  $P$  sur tout intervalle de temps est donc nulle. La variation de  $P$  entre les temps 0 et  $T$  est la somme de ses constituantes qui sont les petites variations de  $P$  sur de petits intervalles de temps. Elle est donc égale à zéro. En termes mathématiques, on a donc que :

$$E(dP) = 0$$

et nous savons que :

$$\Delta P = P_T - P_0 = \sum_i \Delta P_i$$

pour des  $\Delta_i P$  petits. Alors :

$$E(P_T - P_0) = \sum_i E(\Delta P_i) = 0$$

Définissons  $f$  et  $g$  comme étant des prix d'actif transigés qui ne dépendent que d'une seule

---

<sup>30</sup> Pour rédiger cette appendice, nous nous sommes inspirés de l'ouvrage suivant : Hull, J.C. (2006), opt. cit. On consultera également l'excellente introduction aux martingales de Tavella, R. (2002), opt. cit.

source d'incertitude (un seul facteur). En supposant que ces actifs ne génèrent aucun flux de revenus durant la période considérée, définissons également :

$$\phi = \frac{f}{g} \quad (2)$$

soit le prix relatif de  $f$  par rapport à  $g$ . Il mesure le prix de  $f$  par unité de  $g$  plutôt qu'en dollars. L'actif  $g$  est connu sous le nom de numéraire, une appellation très classique en sciences économiques.

Un résultat important connu sous le nom de mesure de martingale équivalente montre que, lorsqu'il y a effectivement absence d'arbitrage,  $\phi$  est une martingale en considérant un certain choix du prix du marché du risque :  $\lambda = (\mu - r) / \sigma$ . De plus, pour un numéraire donné  $g$ , le même choix du prix du marché du risque  $\lambda$  fait en sorte que  $\phi$  est une martingale pour tout actif  $f$ . Puisque dans notre cas le drift (dérive) est nul, le choix du prix du risque se limite à la volatilité de  $g$ . Donc, dans ce cas, lorsque le prix du risque est supposé égal à la volatilité de  $g$ , le ratio  $f / g$  est une martingale pour tout actif de prix  $f$ .

Afin de prouver ce résultat et en l'occurrence le clarifier, considérons ce qui suit. Supposons que les volatilités de  $f$  et de  $g$  soient respectivement  $\sigma_f$  et  $\sigma_g$ . Supposons également que les processus stochastiques de  $f$  et de  $g$  soient donnés par des mouvements browniens géométriques classiques :

$$\frac{df}{f} = \mu_1 dt + \sigma_f dz$$

$$\frac{dg}{g} = \mu_2 dt + \sigma_g dz$$

Sachant que  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ , alors on a que :  $\mu = r + \lambda \sigma$ . Donc on peut définir les dérivées de ces processus sachant que  $\lambda = \sigma_g$  par :

$$\mu_1 = r + \sigma_g \sigma_f$$

$$\mu_2 = r + \sigma_g^2$$

d'où on obtient les processus de  $f$  et de  $g$  définis en termes du prix du risque, soit :

$$\frac{df}{f} = (r + \sigma_g \sigma_f) dt + \sigma_f dz$$

$$\frac{dg}{g} = (r + \sigma_g^2)dt + \sigma_g dz$$

Nous connaissons également le résultat désormais classique obtenu à partir du lemme d'Itô que pour un processus, par exemple,  $G = \ln f$ , on obtient le résultat que ce processus est donné par :  $d \ln f = (\mu_1 - \sigma_f^2 / 2)dt + \sigma_f dz$ . En appliquant ce résultat à nos deux processus, on obtient :

$$d \ln f = (r + \sigma_g \sigma_f - \sigma_f^2 / 2)dt + \sigma_f dz$$

$$d \ln g = (r + \sigma_g^2 / 2)dt + \sigma_g dz$$

Le processus de  $\ln \phi = \ln \left( \frac{f}{g} \right) = \ln f - \ln g$  est donc :

$$d \ln \phi = d(\ln f - \ln g) = d \ln f - d \ln g = (\sigma_g \sigma_f - \sigma_f^2 / 2 - \sigma_g^2 / 2)dt + (\sigma_f - \sigma_g)dz$$

Pour déterminer le processus de  $\phi = f / g$  à partir de  $\ln \phi$ , il suffit d'appliquer le lemme d'Itô en définissant correctement notre fonction  $G$ . Nous rappelons ici le lemme d'Itô appliqué sur une fonction  $G = \ln(x)$  en supposant que  $x$  est un mouvement brownien géométrique de moyenne  $a$  et de variance  $b^2$ , soit :  $dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$ . Dans le cas qui nous intéresse, définissons  $G = f / g$ ,  $x = f / g = f^*$ ,  $a = \mu f^*$  et  $b = \sigma_f - \sigma_g$ , alors on obtient :

$$\begin{aligned} dG &= \left( \frac{\partial G}{\partial f^*} \mu f^* + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{(\partial f^*)^2} (\mu f^*)^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial f^*} (\sigma_f - \sigma_g) dz \\ \Rightarrow dG &= (0 + 0 + 0)dt + 1(\sigma_f - \sigma_g) f^* dz \\ &= (\sigma_f - \sigma_g) \frac{f}{g} dz = d \left( \frac{f}{g} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

L'équation (3) démontre que (2) est en fait une martingale. Ceci nous donne donc le résultat désiré. Un monde où le prix du risque est  $\sigma_g$  est un monde défini comme étant neutre au risque à terme (*forward risk neutral*) par rapport à  $g$ . Parce que  $(f / g)$  est une martingale, en utilisant (1) et en définissant  $\phi_T = f_T / g_T$ ,  $\phi_0 = f_0 / g_0$ , on a que :

$$E_g(\phi_T) = \phi_0 \quad (4)$$

où  $E_g(.)$  est l'espérance dans un monde qui est neutre au risque à terme par rapport à  $g$ .

Enfin, on peut réécrire (4) comme suit :

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

$$\Rightarrow f_0 = g_0 E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right) \quad (5)$$

L'équation (5) est à la base du pricing des actifs contingents et est donc d'une importance capitale. Elle nous dit qu'un actif dérivé peut être valorisé simplement en calculant une espérance.

## Bibliographie

Andreasen, J. (2004), Markov yield curve models for exotic interest rate products, Lecture notes.

Andersen, L.B.G., Andreasen, J. (2002), Volatile Volatilities, *Risk*, 15(12), December.

Andreasen, J.(2001), The pricing of Bermudean swaptions. Risk conference, Paris.

Baxter, M. & Rennie (1996), *Financial calculus : An introduction to derivatives pricing*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bellier-Delienne, A. (2005), Synthèse sur les options de livraison dans les contrats à terme, *FINÉCO*, 12.

Black, F. et P. Karisinski (1991), Bond and option pricing when short rate are lognormal, *Financial Analyst Journal*, July-Aug:52-59.

Brace, A., Gatarek, D. et M. Musiela (1997), The market model of interest rate dynamics, *Mathematical Finance*, 7, 127-155.

Cameron, R.H. et W.T. Martin (1944), Transformations of Wiener integrals under translations, *Annals of Mathematics*, 45, no.2 : 386-396.

Cox, J.C., Ingersoll, J.E. et S.A. Ross(1985), A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53:385-407.

de La Grandville, O. (2001), *Bond pricing and portfolio analysis : Protecting investors in the long run*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Girsanov, I.V. (1960), On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, *Theory of Probability and Its applications*, Vol. 5, no.3 : 285-301.

Heath, D., Jarrow, R., et Morton, A. (1992) Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, 60, 77-105.

Ho, T.S.Y et S.B. Lee (1986), Term structure movements and pricing of interest rate contingent claims, *Journal of Finance*, 41:1011-1029.

Hull, J.C. (2006), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 6<sup>ième</sup> édition, Prentice Hall.

Hull, J.C. et A.D. White (1993), One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28:235-254.

James, J. et Webber, N. (2000), *Interest rate modelling*, Wiley series in financial engineering, Chichester.

Jamshidian, F. (1989), An exact bond pricing formula, *Journal of Finance*, 44 :205-209.

Lin, B. et D. Paxon (1995), The Value of an Option to Exchange One Asset for Another, *Journal of Banking & Finance*, 21, 101-126.

McDonald, R.L. (2006), *Derivatives Markets*, 2<sup>ième</sup> édition, Pearson Addison Wesley.

Piterbarg, V.V. (2006), TARNs : Models, Valuation, Risk Sensitivities, in *The Best of Wilmott* 2, Wiley.

Tavella, D. (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing*, John Wiley & Sons.

Vasicek, O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure , *Journal of Financial Economics*, 5:177-188.

Yu, S. (1997), Term Structure of Interest Rates and Implicit Options : The Case of Japanese Bond Futures, *Journal of Business Finance and Accounting*, 24, 593-614.